

**MATEMATİKSEL MODELLEME İLE NÜFUS VE YAPAY SİNİR AĞLARI  
YARDIMIYLA KİŞİ BAŞINA DÜŞEN MİLLİ GELİR TAHMİNİ: TÜRKİYE ÖRNEĞİ****THE ESTIMATES OF POPULATION BY MATHEMATICAL MODELING AND PER  
CAPITA INCOME BY ARTIFICIAL NEURAL NETWORK: EXAMPLE OF TURKEY****Yrd. Doç. Dr. Bahatdin DAŞBAŞI**Erciyes Üniversitesi, İzzet Bayraktar Uygulamalı Bilimler Yüksek Okulu, Muhasebe ve Finans  
Yönetimi Bölümü Kayseri/Türkiye**Doç. Dr. Derviş BOZTOSUN**Erciyes Üniversitesi, İzzet Bayraktar Uygulamalı Bilimler Yüksek Okulu, Muhasebe ve Finans  
Yönetimi Bölümü Kayseri/Türkiye**Öğr. Gör. Emre Hayri BARAZ**Erciyes Üniversitesi, İzzet Bayraktar Uygulamalı Bilimler Yüksek Okulu, Muhasebe ve Finans  
Yönetimi Bölümü Kayseri/Türkiye**ÖZ**

Bu çalışmada, popülasyon lojistik büyüme modelinin diferansiyel denklem şeklindeki ifadesinin analitik çözümünden yararlanarak en küçük kareler yöntemiyle üstel bir eğri uyduruldu. Bu eğrinin parametreleriyle diferansiyel denklemin parametreleri arasında ilişki kurularak uygulama olarak gelecekteki Türkiye nüfusu tahmin edilmeye çalışıldı. Ayrıca programı yapay sinir ağı NAR (Nonlinear Autoregresif) modeli simülasyon tekniği yardımıyla Türkiye kişi başına düşen milli gelir tahmin edilmeye çalışıldı.

**Anahtar Kelimeler:** Lojistik büyüme modeli, En küçük kareler yöntemi, Yapay sinir ağları**ABSTRACT**

In this study, an exponential curve was constructed using the least squares method by the analytical solution of the expression of the logistic growth model as the differential equation. As an application, the population of Turkey in the future was tried to be estimated by establishing a relationship between the parameters of this curve and the parameters of the differential equation. Also, Turkey's national income per capita was tried to be estimated via the simulation technique of artificial neural network NAR (Nonlinear Autoregressive).

**Keywords:** Logistic growth model, Least squares method, Artificial neural network**1. GİRİŞ**

Popülasyon, belli bir zaman diliminde birim alana düşen birey sayısı olup, popülasyonun ekosistemdeki işlevi yoğunluğuyla alakalıdır. Dolayısıyla doğum oranı  $\left( \text{Doğum oranı} = \frac{\text{Doğan birey sayısı}}{\text{Toplam birey sayısı}} \right)$  ve ölüm oranı  $\left( \text{Ölüm oranı} = \frac{\text{Ölen birey sayısı}}{\text{Toplam birey sayısı}} \right)$ , içe ve dışa doğru göçler popülasyon yoğunluğunu etkilemektedir. Dolayısıyla, uygun çevre şartlarının bulunduğu ortama yerleşen bir türün, ortamın uygunluğu derecesinde, sayısında artma veya azalma görülür. Çevre şartları ve biyotik faktörler popülasyonun büyüklüğünü denetler. Temel olarak bir popülasyonun büyüklüğündeki değişim;

$$\underbrace{\text{Popülasyon Büyüklüğündeki Değişim}}_A = \underbrace{\left( \begin{array}{c} \text{Doğumlar} \\ + \\ \text{İçe Göçler} \end{array} \right)}_B - \underbrace{\left( \begin{array}{c} \text{Ölümler} \\ + \\ \text{Dışa Göçler} \end{array} \right)}_C$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $B < C$  olduğunda popülasyon küçülür,  $B > C$  olduğunda popülasyon büyür ve  $B = C$  olduğunda ise popülasyon dengede kalır (Allen, 2007).

Popülasyon büyüklüğünün ileriki yıllarının zamana bağlı olarak tahmin edilmesi sayesinde, bir ülkenin ekonomik ve sosyal planlaması yapılmaktadır (Günsoy & Tekeli, 2015). Bu tahmin işleminde genellikle matematiksel modelleme kullanılmaktadır. Matematiksel modelleme, bir durumun ya da olayın matematiksel semboller kullanılarak matematik diline aktarma sürecidir (Daşbaşı & Öztürk, Mathematical modelling of bacterial resistance to multiple antibiotics and immune system response, 2016). Matematiksel modelleme ile popülasyon büyüklüğünün tahmin edilmesinde kullanılan ve özellikle diferansiyel denklemler aracılığıyla yapılan bu süreçlerin temel aldığı modellerden bazıları şu şekilde özetlenebilir (Daşbaşı, Bazı Bakteriyel Patojenlerin Matematiksel Modelleri ve Uygulamaları, 2016):

Malthusian gelişim modeli (Edelstein-Keshet, 1988; Malthus, 1798): Popülasyonun boyutu gelişim oranıyla orantılıdır. Malthusian adı İngiliz ekonomist Thomas Malthus (1755-1845)'un popülasyon gelişim teorisi için katkılarında dolayı verilmiştir. Bahsedilen tarzdaki modeller arasında en ilkel olan bu modelde,  $t$  zamanındaki popülasyon büyüklüğü  $x = x(t)$  ile gösterilmektedir. Ayrıca doğum oranı  $b$ , ölüm oranı  $d$  ve bu parametrelere bağlı net gelişim oranı  $a = b - d$  olmak üzere önerdiği model aşağıdaki şekildedir.

$$\frac{dx}{dt} = ax = f(x)$$

Gompertz gelişim modeli (Hale & Koçak, 1991; Gompertz, 1825): Adı İngiliz sigortacı Benjamin Gompertz (1779-1865) tarafından adlandırılmış olup Malthusian gelişim modeli geliştirilerek tasarlanmıştır. Bazı popülasyonlar zamanla birlikte üstel biçimde gelişmezler. Popülasyon büyüdükçe bütün popülasyon hacminin iki kat zamanı olan zamana kadar sürekli bir şekilde artar. Burada,  $t$  zamanındaki çoğalan bireylerin büyüklüğü  $x(t)$ , net gelişim oranı  $a(t)$  ve  $\frac{da}{dt} = -\alpha a$ , ( $\alpha > 0$ ,  $a(0) = k$ ),  $a(t) = ke^{-\alpha t}$  olmak üzere model aşağıdaki şekildedir.

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x = ke^{-\alpha t}x$$

Ayrıca  $x(0) = x_0$  başlangıç koşulu ile bu diferansiyel denklemin çözümü;  $x(t) = x_0 e^{\frac{k}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})}$  şeklinde olup  $a(t)$  ve  $x(t)$  den ayrı ayrı  $e^{-\alpha t}$  çekilerek eşitlenirse; gelişim oranı, popülasyon boyutunun bir fonksiyonu olarak  $a(x(t)) = k - \alpha \ln\left(t \frac{x(t)}{x_0}\right)$  elde edilir. Ayrıca, popülasyonun 2 katına ulaşma süresi için geçen süre  $\ln\left(\frac{2}{a}\right)$  olur.

Lojistik gelişim modeli (May, 1976; Verhulst, 1838); Burada kullanılan diferansiyel denklem, popülasyon büyüme modelleri için en iyi bilinenlerden biri olup, denklem Belçikalı matematikçi Pierre Verhulst (1804-1849) tarafından yapılmıştır. Bu modelde gelişim oranı olan  $a'$  nın  $a(t) = r\left(1 - \frac{x}{k}\right)$  olan popülasyon boyutunun bir azalan fonksiyonu olduğu kabul edilir. Taşıma kapasitesi olan  $k$ ' dan daha büyük boyutlu popülasyonlar için gelişimin oranı negatiftir ve benzer biçimde  $x < k$  ise pozitifdir. Lojistik diferansiyel denklem;

$$\frac{dx}{dt} = r\left(1 - \frac{x}{k}\right)x$$

olup  $r > 0$ , gerçek gelişim oranıdır.

Popülasyonlar bulunduğu ortamda sınırsız çoğalamaz. Popülasyon büyüklüğünü rekabet, av-avcı ilişkisi, sıcaklık, yağış, besin v.b faktörler etkiler. Belirli özelliklere sahip bir yaşama ortamında bulunabilecek en fazla birey sayısı, taşıma kapasitesini belirler. Popülasyonda birey sayısı taşıma kapasitesine yaklaştıkça çevre direnci artar, popülasyonun büyüme hızı yavaşlar. Popülasyonun artışı engelleyen ekolojik faktörler çevre direncini oluşturur (Volterra, 1926). Bundan dolayı matematiksel modelleme ile popülasyon büyüklüğünün tahmininde genellikle bu duruma uygun olarak lojistik gelişim modelinden yararlanılmaktadır (Daşbaşı,

Öztürk, & Özköse, Mathematical Modelling of Bacterial Competition with Multiple Antibiotics and it's Stability Analysis, 2016).

Uygulamalı bilimlerdeki deney ve gözlemlerden birçok veri elde edilmektedir. Elde edilen bu verilerin anlamlı fonksiyonlar şeklinde ifade edilmesi gerekir. İşte, bilinen değerlerden fonksiyonun kendisini veya kendisine en yakın fonksiyonun belirlenmesi (elde edilmesi) işlemi "eğri uydurma" (curve fitting) olarak adlandırılır. Eğri uydurmada kullanılan en etkili yöntemlerden biri "en küçük kareler yöntemidir. Bu yöntem, uydurulan yaklaşık fonksiyon değerleri ile gerçek fonksiyon değerleri arasındaki farkların kareleri toplamının minimum yapılması esasına dayanan en etkili eğri uydurma yöntemidir (Vatansever, 2006).

Bu çalışmada lojistik büyüme modeli temelli, otonom diferansiyel denklem şeklinde tanımlanan bir popülasyon büyüme modeli önerildi. Daha sonra bu denklemin kalitatif analizi yapıldı. Gerçek değerler ışığında (Bu çalışmada Türkiye' nin 2012-2015 yılları arasındaki nüfus değerleri kullanılmıştır. ) hata kareler ortalamasını minimum yapacak şekilde önerilen diferansiyel denklemin analitik çözümüyle uyumlu olarak üstel bir fonksiyon araştırılmış ve diferansiyel denklemde verilen parametreler ile bu fonksiyon arasında ilişki bulunmuştur. Uygulama olarak Türkiye'nin 4 yıllık nüfus büyüklükleri yardımıyla bilinmeyen parametreler bulunarak daha ileriki yıllar için nüfus tahminin yanı sıra maksimum nüfus büyüklüğü ve bunun zamanı tahmin edildi. Bu sonuçlar nümerik simülasyonlar vasıtasıyla desteklenerek analizin sonuçları bu simülasyonlarda görüldü.

## 2. ÖNERİLEN MODEL

$t$ , zaman parametresini göstermek üzere, önerilen popülasyon büyüme modeli

$$\frac{dx}{dt} = g(x) = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - ex + f \quad (1)$$

şeklindeki lineer olmayan 1. Mertebeden otonom diferansiyel denklemdir. (1)' de kullanılan parametrelerin ifadesi şu şekildedir. Popülasyondaki birey başına doğum ya da çoğalma oranı  $r$  ile, popülasyondaki birey başına ölüm oranı  $e$  ile, popülasyon taşıma kapasitesi  $K$  ile ve popülasyona göç miktarı sabit bir  $f$  miktarı ile gösterilmektedir.

Biyolojik olarak çalışılan bölge,

$$\Omega = \{x \in R: 0 \leq x \leq K\} \quad (2)$$

kümesidir.  $\Omega$  ile sınırlandırılan (1) denkleminin vektör alanı bu bölgenin dışında bir nokta içermez ve böylece  $\Omega$  da başlayan çözümlerin tüm  $t \geq 0$  için bu küme içerisinde kalmaktadır. Bu durum (2)' de tanımlanan  $\Omega$  bölgesinin (1) denkleminle ilgili olarak pozitif olarak değişmez olduğunu ve böylece biyolojik olarak anlamlı (popülasyon büyüklüğü negatif olamaz) olduğunu ifade eder.

### (1) Denkleminin Analitik Çözümü

(1) denklemini değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem olup çözümü aşağıdaki şekilde bulunur.

$$K \int \frac{1}{rx(K-x) + fK - eKx} dx = \int dt$$

Başlangıç koşulu

$$x(t_0 = 0) = x_0 = \frac{K(r - e)}{2r} \text{ ve } \frac{fK}{r} = F \quad (3)$$

olsun. Bu durumda çözüm;

$$x(t) = \sqrt{F + x_0^2} + x_0 - \frac{2\sqrt{F + x_0^2}}{1 \pm e^{2t \frac{f\sqrt{F + x_0^2}}{F}}} \quad (4)$$

şeklinde dir. Ayrıca  $t \rightarrow \infty$  için çözüm, global asimtotik kararlı denge noktası olan;

$$x(t) = \sqrt{F + x_0^2} + x_0 \quad (5)$$

noktasına yaklaşır.

**(1) Denklemnin Kalitatif Analizi**

(1) denklemnin denge noktaları  $g(x) = 0$  denklemnin çözülmesiyle elde edilen noktalar olup buradan denge noktaları;  $rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - ex + f = 0$  düzenlenerek;

$$\frac{r}{K}x^2 - (r - e)x - f = 0 \quad (6)$$

denkleminde elde edilirler. (6) denklemnin diskriminantı  $\Delta = (r - e)^2 + \frac{4fr}{K}$  olup parametrelerin pozitif olmasından dolayı  $\Delta > 0$  olacağı açıktır. Dolayısıyla (6) denklemnin kökleri (3) eşitlikleri yardımıyla

$$x_1 = \left(x_0 + \sqrt{x_0^2 + F}\right) \text{ ve } x_2 = \left(x_0 - \sqrt{x_0^2 + F}\right) \quad (7)$$

şeklinde elde edilir. (10)'da  $x_1 > 0$  ve  $x_2 < 0$  olduğu açıktır. Bu denge noktalarının kararlılık analizinde, eğer;  $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=Denge\ noktası} < 0$  ise bu nokta lokal asimtotik kararlı  $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=Denge\ noktası} > 0$  olduğunda ise kararsızdır. Böylece;  $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_1} = -\frac{2r}{K}\left(\sqrt{x_0^2 + F}\right) < 0$  ve  $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_2} = \frac{2r}{K}\left(\sqrt{x_0^2 + F}\right) > 0$  olduğundan dolayı pozitif denge noktası olan  $x_1$  noktası lokal asimtotik kararlıdır. Yani belirli başlangıç koşullarıyla (1)'de ifade edilen denklemin çözümleri bu noktaya yaklaşır. Ayrıca (5)'de ifade edilen limit noktası aynı zamanda  $x_1$  noktası olmasından dolayı tüm başlangıç noktalarıyla (1)'in çözümleri bu noktaya yaklaşır ki bu nokta aynı zamanda global asimtotik kararlı denge noktasıdır.

**3. EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİYLE EĞRİ ARAMA**

(4) çözümü dikkate alındığında aranacak eğri  $x(t) = \sqrt{F + x_0^2} + x_0 - \frac{2\sqrt{F+x_0^2}}{1 \pm e^{2t \frac{f\sqrt{F+x_0^2}}{F}}}$  şeklinde olmalıdır.

Dolayısıyla

$$y(t) = \mp e^{2t \frac{f\sqrt{F+x_0^2}}{F}} \quad (8)$$

olarak kabul edilirse bu çözüm  $x(t) = \sqrt{F + x_0^2} + x_0 - \frac{2\sqrt{F+x_0^2}}{1+y(t)}$  olup  $y(t)$  çekilerek

$$y(t) = 1 + \frac{2\sqrt{F + x_0^2}}{x(t) - x_0 - \sqrt{F + x_0^2}} \quad (9)$$

elde edilir. Dolayısıyla bu kısımda (8)'de ifade edildiği gibi bir eğri en küçük kareler (EKK) yöntemiyle aranacak daha sonra bu eğri (9)'da yerine yazılarak parametreler tahmin edilecektir.

Şimdi EKK yöntemiyle eğri arayalım. (8)'in her iki yanının doğal logaritması alınır;  $\ln|y| = \ln \left| e^{2t \frac{f\sqrt{F+x_0^2}}{F}} \right|$

yani,  $\ln|y| = t \frac{2f\sqrt{F+x_0^2}}{F}$  elde edilir.

$$v_1 = F \text{ ve } v_2 = x_0^2 \quad (10)$$

olsun. Dolayısıyla hata fonksiyonu;

$$H \left( f, \overset{v_1}{\widetilde{F}}, \overset{v_2}{\widetilde{x_0^2}} \right) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{2f\sqrt{F + x_0^2}}{F} t_i - \ln|y_i| \right]^2 = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{2f\sqrt{v_1 + v_2}}{v_1} t_i - \ln|y_i| \right]^2$$

şeklinde ve böylece  $\frac{\partial H}{\partial f} = \frac{\partial H}{\partial v_1} = \frac{\partial H}{\partial v_2} = 0$  olacağından dolayı;

$$\begin{cases} 2 \frac{2\sqrt{v_1 + v_2}}{v_1} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{2f\sqrt{v_1 + v_2}}{v_1} t_i - \ln|y_i| \right] t_i = 0 \\ 2f \left( -\frac{2\sqrt{v_1 + v_2}}{v_1^2} + \frac{1}{\sqrt{v_1 + v_2} v_1} \right) \sum_{i=1}^n \left[ \frac{2f\sqrt{v_1 + v_2}}{v_1} t_i - \ln|y_i| \right] t_i = 0 \\ 2 \frac{f}{\sqrt{v_1 + v_2} v_1} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{2f\sqrt{v_1 + v_2}}{v_1} t_i - \ln|y_i| \right] t_i = 0 \end{cases}$$

düzenlenerek

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{2f\sqrt{v_1 + v_2}}{v_1} t_i - \ln|y_i| \right] t_i = 0 \\ \left( \frac{v_1 - 2(v_1 + v_2)}{v_1^2 \sqrt{v_1 + v_2}} \right) \sum_{i=1}^n \left[ \frac{2f\sqrt{v_1 + v_2}}{v_1} t_i - \ln|y_i| \right] t_i = 0 \quad (11) \\ \sum_{i=1}^n \left[ \frac{2f\sqrt{v_1 + v_2}}{v_1} t_i - \ln|y_i| \right] t_i = 0 \end{cases}$$

elde edilir. (11) denklem sisteminin;

(11) denklem sistemi için;

1.  $v_1 = v_2$  yani,

$$F = x_0^2 \quad (12)$$

olarak kabul edelim. (3) ve (12) yardımıyla (1) diferansiyel denklemi yeniden yazılırsa;

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = \frac{f}{x_0^2} (-x^2 + 2x_0x + x_0x_0) \quad (13)$$

elde edilir.

2. Birinci ikinci veya üçüncü denklemden,  $\frac{2\sqrt{2}f}{\sqrt{v_1}} \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n t_i \ln|y_i|$  elde edilir. Dolayısıyla;

$$\frac{2\sqrt{2}f}{\sqrt{F}} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i \ln|y_i|}{\sum_{i=1}^n t_i^2}$$

$$\frac{f}{\sqrt{F}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\sum_{i=1}^n t_i \ln|y_i|}{\sum_{i=1}^n t_i^2}$$

bulunur. Böylece;  $t_i = 1, 2, \dots, n$  için

$$f = \frac{\sqrt{F} \sum_{i=1}^n t_i \ln|y_i|}{2\sqrt{2} \sum_{i=1}^n t_i^2} = \frac{\sqrt{F} \sum_{i=1}^n t_i \ln|y_i|}{2\sqrt{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \frac{3\sqrt{F}}{\sqrt{2}n(n+1)(2n+1)} \sum_{i=1}^n \ln|y_i|^{t_i}$$

$$f = \frac{3\sqrt{F}}{\sqrt{2}n(n+1)(2n+1)} \ln \sum_{i=1}^n |y_i|^{t_i}$$

(9) gözönüne alındığında,

$$f = \frac{3\sqrt{F}}{\sqrt{2}n(n+1)(2n+1)} \ln \sum_{i=1}^n \left| 1 + \frac{2\sqrt{F+x_0^2}}{x_i - x_0 - \sqrt{F+x_0^2}} \right|^{t_i} \quad (14)$$

elde edilir. (12) ve (14) birlikte düşünüldüğünde;

$$f = \frac{3\sqrt{F}}{\sqrt{2}n(n+1)(2n+1)} \ln \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i + \sqrt{F}(\sqrt{2}-1)}{x_i - \sqrt{F}(\sqrt{2}+1)} \right|^{t_i}$$

toplam ile logaritma fonksiyonu yer değiştirildiğinde ise

$$f = \frac{3\sqrt{F}}{\sqrt{2}n(n+1)(2n+1)} \sum_{i=1}^n t_i \ln \left| \frac{x_i + \sqrt{F}(\sqrt{2}-1)}{x_i - \sqrt{F}(\sqrt{2}+1)} \right| \quad (15)$$

olur.

Böylece; (12) ve (14) birlikte dikkate alındığında ise eğri:

$$y(t) = \mp e^{\frac{f\sqrt{F+x_0^2}}{2t}} = \mp e^{\frac{6t}{n(n+1)(2n+1)} \sum_{i=1}^n t_i \ln \left| \frac{x_i+x_0(\sqrt{2}-1)}{x_i-x_0(\sqrt{2}+1)} \right|},$$

(1) denkleminin çözümü:

$$x(t) = \sqrt{F+x_0^2} + x_0 - \frac{2\sqrt{F+x_0^2}}{1+y(t)} = x_0 \left( \sqrt{2} + 1 - \frac{2\sqrt{2}}{1 \mp e^{\frac{6t}{n(n+1)(2n+1)} \sum_{i=1}^n t_i \ln \left| \frac{x_i+x_0(\sqrt{2}-1)}{x_i-x_0(\sqrt{2}+1)} \right|}} \right)$$

ve (5)' deki global asimtotik kararlı denge noktası:

$$x(t) = x_0(\sqrt{2} + 1) \quad (16)$$

şeklinde olurlar.

#### 4. UYGULAMA 1 (TÜRKİYE NÜFUS TAHMİNİ)

Bu kısımda Türkiye nüfusunun 2012-2015 yılları arasındaki büyüklüğüne bakılarak (1)' de ifade edilen diferansiyel denklemin geliştirilmiş hali olan (13) denkleminin çözümleri irdelenmiştir.

**Tablo 1.** 2012-2015 yılları arasında Türkiye' nin toplam nüfusu (Türkiye İstatistik Kurumu, 2015)

YIL	TOPLAM NÜFUS
(n = 4) için t <sub>3</sub> = 2015	x <sub>3</sub> = 78741053
(n = 3) için t <sub>2</sub> = 2014	x <sub>2</sub> = 77695904
(n = 2) için t <sub>1</sub> = 2013	x <sub>1</sub> = 76667864
(n = 1) için t <sub>0</sub> = 2012	x <sub>0</sub> = 75627384

- t<sub>0</sub> = 2012 için başlangıç koşulu x(t<sub>0</sub> = 2012) = x<sub>0</sub> = 75627384 ve (12)' den F = x<sub>0</sub><sup>2</sup> yani F = 75627384<sup>2</sup> elde edilir.

- (15) 'den

$$f = \frac{\sqrt{F}}{60\sqrt{2}} \ln \left( \left| \frac{x_0+\sqrt{F}(\sqrt{2}-1)}{x_0-\sqrt{F}(\sqrt{2}+1)} \right|^{t_0} \left| \frac{x_1+\sqrt{F}(\sqrt{2}-1)}{x_1-\sqrt{F}(\sqrt{2}+1)} \right|^{t_1} \left| \frac{x_2+\sqrt{F}(\sqrt{2}-1)}{x_2-\sqrt{F}(\sqrt{2}+1)} \right|^{t_2} \left| \frac{x_3+\sqrt{F}(\sqrt{2}-1)}{x_3-\sqrt{F}(\sqrt{2}+1)} \right|^{t_3} \right)$$

$$f =$$

$$\frac{75627384}{60\sqrt{2}} \ln \left( \left| \frac{75627384+75627384(\sqrt{2}-1)}{75627384-75627384(\sqrt{2}+1)} \right|^1 \left| \frac{76667864+75627384(\sqrt{2}-1)}{76667864-75627384(\sqrt{2}+1)} \right|^2 \left| \frac{77695904+75627384(\sqrt{2}-1)}{77695904-75627384(\sqrt{2}+1)} \right|^3 \left| \frac{78741053+75627384(\sqrt{2}-1)}{78741053-75627384(\sqrt{2}+1)} \right|^4 \right)$$

$$f =$$

$$\frac{75627384}{60\sqrt{2}} \ln \left( 1 \left| \frac{76667864+31325888,13959801}{76667864-183580656,139598} \right|^2 \left| \frac{77695904+31325888,13959801}{77695904-183580656,139598} \right|^3 \left| \frac{78741053+31325888,13959801}{78741053-183580656,139598} \right|^4 \right)$$

$$f \cong 891277,26782998 \ln \left( \left| \frac{107993752,13959801}{106912792,13959801} \right|^2 \left| \frac{109021792,13959801}{105884752,13959801} \right|^3 \left| \frac{110066941,13959801}{104839603,13959801} \right|^4 \right)$$

$$f \cong 891277,2678299834 \ln((1,02032)(1,091540)(1,214859))$$

$$f \cong 891277,2678299834 \ln(1,35301)$$

$$f \cong (891277,2678299834)(0,3023317)$$

$$f \cong 269461$$

- (16)' dan global asimtotik kararlı denge noktası:

$$x(t) = x_0(\sqrt{2} + 1) = 75627384(\sqrt{2} + 1) \cong 182580656$$

- Böylece (13) diferansiyel denklemini aşağıdaki şekle dönüştür.

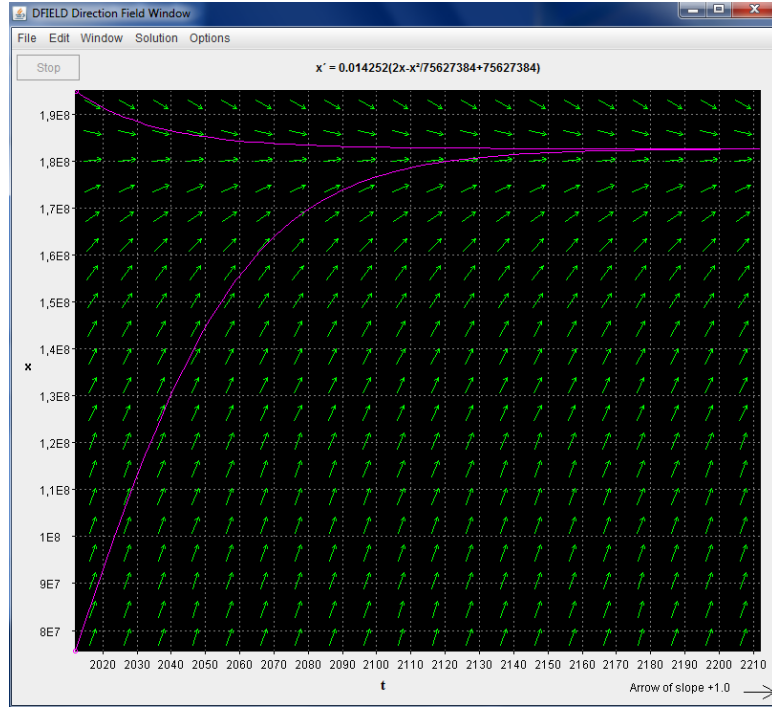
$$\frac{dx}{dt} = f(x) = 2 \frac{f}{x_0} \left( x - \frac{x^2}{2x_0} + \frac{x_0}{2} \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = 2 \frac{269461}{75627384} \left( x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{75627384} + \frac{75627384}{2} \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = 4 \frac{269461}{75627384} \left( 2x - \frac{x^2}{75627384} + 75627384 \right)$$

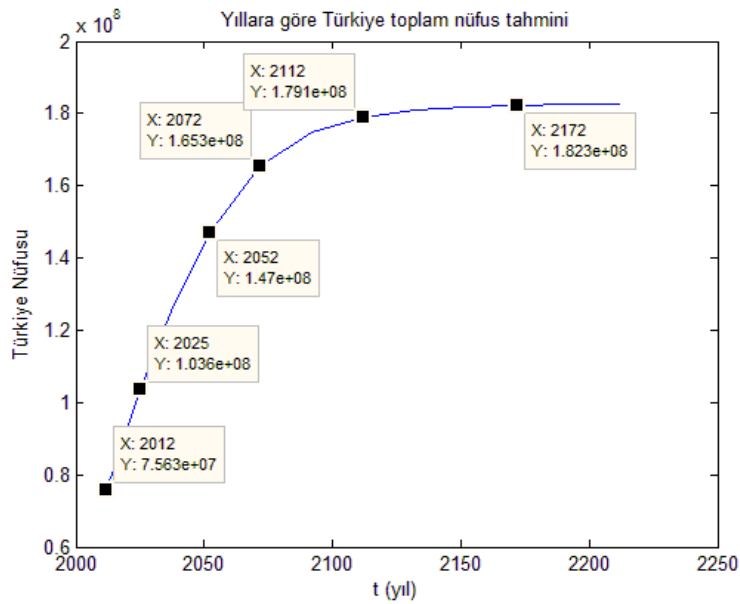
$$\frac{dx}{dt} = f(x) = 0,014252 \left( -\frac{x^2}{75627384} + 2x + 75627384 \right) \quad (17)$$

(17) denklemini dfield.jar programı aracılığıyla çizildiğinde denklemin tüm çözümleri grafiği Şekil 1' de görüldüğü gibi global asimtotik kararlı denge noktası olan  $x(t) \cong 182580656$  noktasına yaklaşmaktadır.



Şekil 1: (17) denkleminin çözüm grafiği

Dolayısıyla çözüm eğrileri boyunca okların yönü global asimtotik kararlı denge noktası olan  $x(t) \cong 182580656$  noktasına yaklaşmaktadır. Yani tüm pozitif başlangıç koşullarıyla başlayan çözümler bu noktaya yaklaşır. Bu durum ise  $x(t_0 = 2012) = 75627384$  başlangıç koşuluna göre yaklaşık olarak  $t > 2180$  için oluşmaktadır.

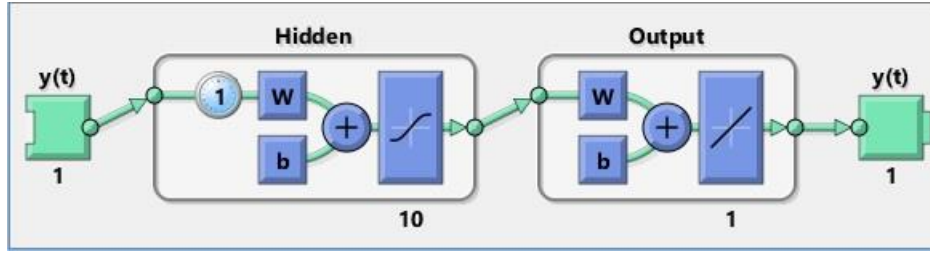


Şekil 2: (17) denkleminin MATLAB yardımıyla çözüm grafiği



## 5. UYGULAMA 2 ( KİŞİ BAŞI GAYRİ SAFİ YURTIÇİ HASILA TAHMİNİ)

Türkiye'nin 1960 – 2015 yılları arasındaki Gayri Safi Yurtiçi Hasıla (GSYİH) verileri dünya bankası veri tabanından temin edilmiştir. Daha sonra bu veriler MATLAB 2015Ra programı yardımıyla yapay sinir ağı NAR (Nonlinear Autoregresif) modeli yardımıyla işlenerek geleceğe yönelik öngörüler elde edilmiştir.

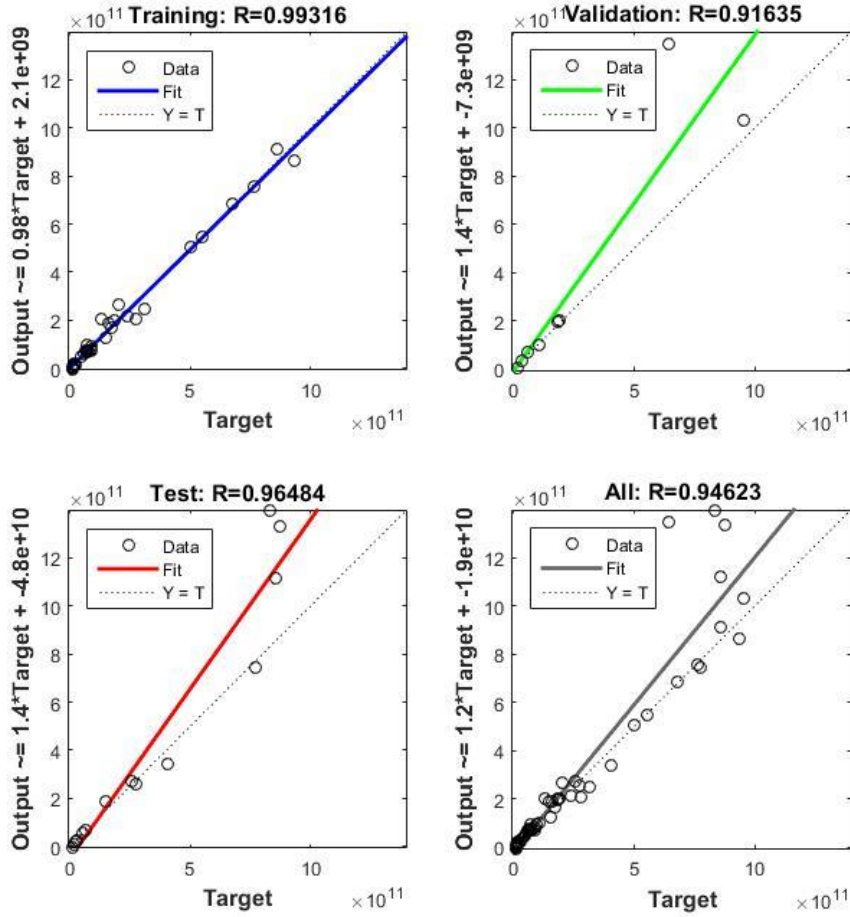


Şekil 3: Kullanılan NAR Modeli

Tablo 2: Dünya Bankası Veritabanından elde edilen GSYİH değerleri

Yıl	GSYİH	Yıl	GSYİH
1960	13995067818	1989	107143348667
1961	8022222222	1990	150676291094
1962	8922222222	1991	150027833333
1963	10355555556	1992	158459130435
1964	11177777778	1993	180169736364
1965	11944444444	1994	130690172297
1966	14122222222	1995	169485941048
1967	15666666667	1996	181475555283
1968	17500000000	1997	189834649111
1969	19466666667	1998	275768695819
1970	17086956522	1999	255884300382
1971	16256619964	2000	272979390595
1972	20431095406	2001	200254104151
1973	25724381625	2002	238423907923
1974	35599913836	2003	311825946795
1975	44633707243	2004	404776328438
1976	51280134554	2005	501422832614
1977	58676813687	2006	552504962256
1978	65147022486	2007	675754121015
1979	89394085658	2008	764322933265
1980	68789289566	2009	644656538878
1981	71040020140	2010	771876943466
1982	64546332581	2011	832546462300
1983	61678280115	2012	873981840596
1984	59989909458	2013	950595641012
1985	67234948265	2014	934167774215
1986	75728009963	2015	859383637729
1987	87172789528		
1988	90852814005		





Şekil 4: Tablo 3 verilerinden elde edilen NAR grafikleri

MATLAB yardımıyla oluşturulan Yapay Sinir Ağı Model'inden elde edilen regresyon denklemi;

$$Y_t = 1,2 * Y_{t-1} - 1,9e + 10$$

şeklinde olup öngörülen bazı sonuçlar ve uygulama 1' de oluşturulan matematiksel model sonucunda elde edilen nüfus bilgileri Tablo 3'de görülmektedir.

**Tablo 3:** Öngörülen GSYİH ve Kişi Başı GSYİH Değerleri

Yıl	GSMH	NÜFUS	KİŞİ BAŞI GSMH
2023	\$1.228.890.490.947,42	98000000	\$12.539,70
2053	\$2.078.906.871.458,38	144000000	\$14.436,85
2071	\$3.094.325.517.090,96	163000000	\$18.983,59
2112	\$8.902.018.327.842,02	178000000	\$50.011,34

## KAYNAKÇA

Türkiye İstatistik Kurumu. (2015, Aralık). Adrese Dayalı Nüfus Kayıt Sistemi Sonuçları, 2015: <http://www.tuik.gov.tr/> adresinden alınmıştır

Allen, L. J. (2007). An Introduction to Mathematical Biology.

Daşbaşı, B. (2016, Ocak). Bazı Bakteriyel Patojenlerin Matematiksel Modelleri ve Uygulamaları. Dok. Tez. Kayseri: Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Daşbaşı, B., & Öztürk, İ. (2016). Mathematical modelling of bacterial resistance to multiple antibiotics and immune system response. SpringerPlus, 5(408), 1-17.

- Daşbaşı, B., Öztürk, İ., & Özköse, F. (2016). Mathematical Modelling of Bacterial Competition with Multiple Antibiotics and it's Stability Analysis. *Karaelmas Fen ve Mühendislik Dergisi*, 6(2), 299-306.
- Edelstein-Keshet, L. (1988). *Mathematical models in biplogy*. New York: The Random Hause/Birkhäuser.
- Gompertz, B. (1825). On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 115, 513-585.
- Günsoy, G., & Tekeli, S. (2015, Mart). Nüfusun Yaşlanması ve Ekonomik Büyüme İlişkisi: Türkiye Üzerine Bir Analiz. *Amme İdaresi Dergisi*, 48(1), 35-87.
- Hale, J., & Koçak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. New York: Springer-Verlag.
- Malthus, T. R. (1798). *An Essay On The Principle Of Population as it Affects The Future Improvement of Society*. London: J. Johnson.
- May, R. M. (1976). Models for two interacting populations. *Theoretical ecology: principles and applications*, 49-70.
- Vatansever, F. (2006). *İleri Programlama Uygulamaları*. Ankara, Türkiye: Seçkin Yayıncılık.
- Verhuslt, P. F. (1838). Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correpondance mathematique et Physique*, 10, 112–121.
- Volterra, V. (1926). Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically. *Nature*, 118, 558–560.